V ಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುವುದು

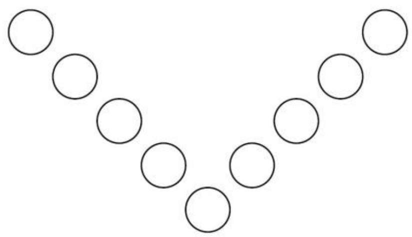
ಒಂದು ತಿದ್ದುಪಡಿ

ಆಂಗ್ಲ ಮೂಲ: ಹರನ್ ಮೌಳಿ

ಕನ್ನಡಾನುವಾದ: ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು

ಮಾರ್ಚ್ 2020 ರ ಅಟ್ ರೈಟ್ ಆಂಗಲ್ಸ್ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ 'ಲೋ ಫ್ಲೋರ್ ಹೈ ಸೀಲಿಂಗ್ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು' ಸರಣಿಗಳಲ್ಲಿ [1], ಈ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಕುರಿತು ಅಭ್ಯಸಿಸಲಾಯಿತು.

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು V ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬಗೆಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ, V ಆಕಾರದ ಎರಡೂ ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ?



ಸಮಸ್ಯೆಯ ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸಿದಾಗ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೋಷವಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಸರಿಪಡಿಸಲಾದ ಎಣಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳದೆ, ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ 9 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1,2,....,9 ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ನಾವು :

$1 + 2 + \ldots + 9 = (9 \cdot 10) / 2 = 45$ ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ.

V ಯ ಕೆಳತುದಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಆದರೆ, ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು (ಮಧ್ಯವಿರುವುದನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) $(45 - x)/2$ ಇರಬೇಕು. ನಿಖರವಾಗಿ, x ಬೆಸ ಆಗಿರಬೇಕು. ಹಾಗಾಗಿ $x \in \{1,3,5,7,9\}$.

ಮೊದಲಿಗೆ, ಬಾಹುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮರುಹೊಂದಿಸುವ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸೋಣ. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ $2 \cdot (4!)^2$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಇದನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು .

V ಯಲ್ಲಿ ಏಕಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆ k ಅನ್ನು 10 - k ರಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ 1 ಹಾಗು 9 ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡೂ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ 1 - 1 ರಂತೆ ಹೊಂದಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಕರಣಗಳು ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕು. 3 ಹಾಗು 7 ಕ್ಕೂ ಇದೇ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ನಾವು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ 5, 7 ಅಥವಾ 9 ಇರುವ ಪ್ರಕರಣಗಳ ಮೇಲಷ್ಟೇ ಗಮನಹರಿಸಬೇಕು.

ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ಇದ್ದಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೊತ್ತವು (45 – 9)/2 = 18 ಆಗುತ್ತದೆ. {1, 8}, {2, 7}, {3, 6} ಹಾಗು {4, 5} ಈ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯು ಅದೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅಂದರೆ 9 ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದು 18 ರ ಅರ್ಧ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಯಥಾಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದರೆ (ಅಂದರೆ V ಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇದ್ದಲ್ಲಿ) ಆಗ ಎಲ್ಲಾ ಜೋಡಿಗಳು ಯಥಾಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಲೇಬೇಕು. ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ {1,8} ಅನ್ನು ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ಇದರೊಂದಿಗೇ ಇರಬೇಕಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಜೋಡಿಗೆ 3 ಆಯ್ಕೆಗಳಿರುತ್ತವೆ ಹಾಗು ಇದರಿಂದಾಗಿ 3 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಬೇರೆ ಆಯ್ಕೆಗಳಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಜೋಡಿಗಳು ಯಥಾಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿರುವ 3 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ.

ಮುಂದೆ, 1 ಹಾಗು 8 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದೇ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ 8 ರೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಇತರ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 10 ಆಗಬೇಕು.
3 + 4 + 5 > 10 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಆ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ಆಗಿರಬೇಕು. ಈಗ ಆ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಉಳಿದೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 8 ಆಗಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಆಗಲು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ : 3 + 5.   8 ರೊಂದಿಗೆ ಅದೇ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು {2, 3, 5, 8} ಆಗಿರುವುದರ ಅರ್ಥ ಇನ್ನೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು {1, 4, 6, 7} ಆಗಿವೆ. 1 ಹಾಗು 8 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಾಗ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹಂಚುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಮಾರ್ಗವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಹಾಗಾಗಿ V ಯ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 9 ಇದ್ದಾಗ, ಒಟ್ಟು 3 + 1 = 4 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ V ಯ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 1 ಇರುವ 4 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಇವೆ.

ಮುಂದೆ, ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ಇರುವ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು (45 – 7)/2 = 19 ಇದೆ. ಮೊತ್ತವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವೂ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಬಾರಿ ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ನಾಲ್ಕು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ (ಅಂದರೆ, {1, 3, 5, 9}), ಒಂದು ಬಾಹುವು ಮೂರು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು ಹಾಗು ಇನ್ನೊಂದು ಬಾಹುವು ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. {1, 3, 5, 9} ಈ ಗುಂಪಿನಿಂದ 3 ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು 4 ದಾರಿಗಳಿವೆ. 1, 3, 5 ಆಯ್ಕೆಯು ಆ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 10 ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂದು ಒತ್ತಾಯಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಇದು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ್ದರಿಂದ ಈ ಆಯ್ಕೆಯು ಇಲ್ಲ. ಉಳಿದ ಮೂರು ಆಯ್ಕೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಂಜಸವಾದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತವೆ.

3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಯ್ಕೆ	V ಗೆ ಪರಿಹಾರ
{1,3,9}	{1,3,9,6} | {7} | {2,4,5,8}
{1,5,9}	{1,5,9,4} | {7} | {2,3,6,8}
{3,5,9}	{3,5,9,2} | {7} | {1,4,6,8}

ಇದು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ 3 ಹಾಗು 7 ಒಂದೊಂದಕ್ಕೂ 3 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೊನೆಗೆ, ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 5 ಇರುವಾಗಿನ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು (45 – 5)/2 = 20 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೊತ್ತವು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನಲ್ಲಿ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕು. ಲಭ್ಯವಿರುವ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು {1, 3, 7, 9}. ಎಲ್ಲಾ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ಇರಬಹುದು; ಇದು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಏಕೆಂದರೆ 1 + 3 + 7 + 9 = 20. ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವೂ ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. {1, 3} ಒಂದೇ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಆಗ ಇನ್ನೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು {7, 9} ಆಗಿರಲೇಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಈಗಾಗಲೇ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಈ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಬೇರೆ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ ಹಾಗೂ ಆ ಎರಡೂ ಸಮಂಜಸವಾದ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. {1, 7} ಒಂದೇ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಆಗ ಇನ್ನೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು {4, 8} ಇವೇ ಆಗಿರಬೇಕು ಹಾಗೂ ಆಗ ಇನ್ನೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು {3, 9, 2, 6} ಆಗುತ್ತವೆ. ಕೊನೆಯದಾಗಿ, {1, 9} ಒಂದೇ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಇನ್ನೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಆಗ ಆ ಇನ್ನೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು {4, 6} ಅಥವಾ {2, 8} ಆಗಿರಬಹುದು. ಹಾಗಾಗಿ

ಈ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಎರಡು ಸಮಂಜಸವಾದ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮುಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ 5 ಇದ್ದಾಗ ಒಟ್ಟು 1 + 1 + 2 = 4 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ.

ಹಾಗಾಗಿ ನಮ್ಮ ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯು ಒಟ್ಟು 4 + 3 + 4 + 3 + 4 = 18 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಮರುಹೊಂದಾಣಿಕೆಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ತಿಳಿದುಬರುವುದೇನೆಂದರೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ V ಅನ್ನು ತುಂಬಲು ಇರುವ ವಿಧಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $2 \cdot (4!)^2 \cdot 18 = 20736$

ಆಕರಗಳು [1] Math Space, https://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-ara-vol-9-no-6-march-2020-summing-V.aspx ಇಂದ "Summing V"

ಹರನ್ ಮೌಳಿ, ಪಿ ಎಸ್ ಬಿ ಬಿ ಸಮೂಹಗಳ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 11 ನೇ ತರಗತಿ ಓದುತ್ತಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತೀವ್ರವಾದ ಉತ್ಸಾಹ ಹೊಂದಿರುವ ಈತನು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವ ಮತ್ತು ಅದರ ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸುವ ಅತೀವ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ. ಅಲ್ಲದೇ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದೆಡೆಗೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಒಲವು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ. ಕಲಿಸುವುದೆಂದರೆ ಬಹಳ ಇಷ್ಟಪಡುವ ಈತನು ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಒಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ನೀಡಲು ರೈಸಿಂಗ್ ಆ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟೀಷಿಯನ್ ಫೌಂಡೇಶನ್ ನಲ್ಲಿ ಸ್ವಯಂಸೇವೆಯನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಇವನನ್ನು mouliharan@gmail.com ಇಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.